

岩土塑性理论中功表达的近似性

祝恩阳, 姚仰平

(北京航空航天大学 交通科学与工程学院 土木工程系, 北京 100191)

摘 要: 对广义剪应力、广义剪应变的表达式作了说明, 在给出其增量表达的同时, 指出了在计算二者增量时可能产生的误解。在此基础上, 分析比较由平均主应力、体积应变增量、广义剪应力、广义剪应变增量表述的功的增量以及由三向主应力与三向主应变增量表述的功的增量得出: 两种表述在一般情况下并不一致。但在某些特殊情况下, 例如等应力 Lode 角加载并满足应力全量 Lode 角与应变增量 Lode 角相等时, 二者的表述一致。岩土塑性理论中塑性功增量存在与功的增量相同的问题, 然而对于实际岩土材料, 应力全量与塑性应变增量等 Lode 角的假定在一般情况下是不能满足的。因此在岩土塑性理论中, 对于一般情况下的等应力 Lode 角加载情况, 用平均主应力、塑性体积应变增量、广义剪应力、塑性广义剪应变增量表述的塑性功增量也只是一种近似。

关 键 词: 岩土塑性理论; 广义剪应力; 广义剪应变; 功的增量

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

Approximation of work calculation in theory of geotechnical plasticity

ZHU En-yang, YAO Yang-ping

(Department of Civil Engineering, School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: The expressions of generalized shear stress and generalized shear strain are introduced. After analyzing the two expressions, mistakes in calculating the increment of generalized shear stress and generalized shear strain are pointed out, and then the right calculations are given. Based on this, two expressions of work increment that one is described by mean stress, volumetric strain increment, generalized shear stress and generalized shear strain increment and the other is described by three-dimensional stresses and three-dimensional strain increments are compared. The conclusion is that the two expressions are not always consistent except in some particular conditions. An example of the particular conditions is that loading in constant Lode angle and also the Lode angle of the three-dimensional stresses is equal to that of the three-dimensional strain increments. The same inconsistency still exists in applications of plastic work increment, while unfortunately the equation of Lode angle of the three-dimensional stresses and the three-dimensional strain increments is not always satisfied for practical geomaterials. So in the theory of geotechnical plasticity, for the condition of loading in constant Lode angle, the plastic work increment expressed by mean stress, plastic volumetric strain increment, generalized shear stress and generalized plastic shear strain increment is just a kind of approximation.

Key words: theory of geotechnical plasticity; generalized shear stress; generalized shear strain; work increment

1 引 言

弹塑性力学框架下建立岩土本构模型往往始于 p - q 应力空间, 其中 p 为平均主应力, q 为广义剪应力。在建立起 p 、 q 与体积应变 ε_v 、广义剪应变 ε_d 的增量耦合对应关系后, 再将其扩展至三维情况^[1]。在实际应用中, 增量 Δq 与 $\Delta \varepsilon_d$ 的表达常直接

借用 q 与 ε_d 的全量定义, 并用于表达塑性功增量 ΔW^p 。作者认为函数的增量表达应由其全量表达的全微分得到, 上述“直接借用”的做法是值得推敲的。本文追溯了 q 与 ε_d 的定义渊源, 对其增量表达进行了数学推导。在分析了“直接借用”做法的合理性与严密性后得出其在数学上的确有失严谨, 但对简单加载情况, 其并不与全微分表达相矛盾。

2 广义剪应力与广义剪应变

塑性力学中, 设三向主应力分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), 相应的三向主应变分别为 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 。则八面体上的剪应力 τ_{oct} 与剪应变 γ_{oct} 可分别表示为^[2-5]:

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (1)$$

$$\gamma_{\text{oct}} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2} \quad (2)$$

对于金属材料, 单向受力是经常研究的。假定材料的泊松比为 ν , 为表述简单, 定义 $q = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{oct}}$,

$$\varepsilon_d = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \gamma_{\text{oct}}, \quad q \text{ 为广义剪应力, } \varepsilon_d \text{ 为广义剪}$$

应变。这样在单向受力 σ_a 、并且该方向应变为 ε_a 时, $q = \sigma_a$, $\varepsilon_d = \varepsilon_a$ ^[2-5]。一般金属材料体积很难压缩, 故取 $\nu \approx 0.5$, 所以广义剪应力与广义剪应变的表达式简化为^[2-5]:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (3)$$

$$\varepsilon_d = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2} \quad (4)$$

岩土类材料属于塑性材料, 故在岩土力学中^[6], 直接将 q 与 ε_d 的表达式从塑性力学中借用过来。姚仰平等^[7]也应用其对比萨斜塔的倾斜问题进行了定性分析。此外, 为反映岩土材料体积变形特性, 岩土力学还将塑性力学中平均主应力 p 与体积应变 ε_v 的概念也一同借用了过来^[6]。

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (5)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (6)$$

3 广义剪应力与广义剪应变的增量

对于平均主应力 p 与体积应变 ε_v 来说, 二者分别是三向主应力与三向主应变的线性函数, 故其增量表达相对简单, 将式 (5)、(6) 微分得

$$\Delta p = \frac{1}{3}(\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3) \quad (7)$$

$$\Delta \varepsilon_v = \Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 + \Delta \varepsilon_3 \quad (8)$$

然而, 广义剪应力 q 与广义剪应变 ε_d 却不是三向主应力与三向主应变的线性函数, 其增量表述相对复杂。将式 (3)、(4) 微分可得

$$\Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\begin{bmatrix} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)\Delta\sigma_1 + \\ (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)\Delta\sigma_2 + \\ (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)\Delta\sigma_3 \end{bmatrix}}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}} \quad (9)$$

$$\Delta \varepsilon_d = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\begin{bmatrix} (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)\Delta\varepsilon_1 + \\ (2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3)\Delta\varepsilon_2 + \\ (2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\Delta\varepsilon_3 \end{bmatrix}}{\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2}} \quad (10)$$

这里有必要指出, 如果习惯性的将增量 Δq 与 $\Delta \varepsilon_d$ 用三向主应力增量 $\Delta \sigma_1$ 、 $\Delta \sigma_2$ 、 $\Delta \sigma_3$ 与三向主应变增量 $\Delta \varepsilon_1$ 、 $\Delta \varepsilon_2$ 、 $\Delta \varepsilon_3$ 直接描述为式 (11)、(12) 中的 $(\Delta q)_w$ 与 $(\Delta \varepsilon_d)_w$ 是不合理的, 如下所示

$$(\Delta q)_w = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2)^2 + (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)^2 + (\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3)^2} \quad (11)$$

$$(\Delta \varepsilon_d)_w = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta \varepsilon_1 - \Delta \varepsilon_2)^2 + (\Delta \varepsilon_1 - \Delta \varepsilon_3)^2 + (\Delta \varepsilon_2 - \Delta \varepsilon_3)^2} \quad (12)$$

比较式 (9)~(12), 式 (11)、(12) 的描述显然与严格推导的式 (9)、(10) 不符。但进一步分析表明: 在某些特殊情况下, 式 (9)、(10) 的表达可退化为式 (11)、(12)。以式 (9) 为例, 当应力全量 Lode 角及应力增量 Lode 角相等且为一常量时, 即满足

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3}{\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3} = a \quad (13)$$

式 (13) 中 a 为某一介于 0、1 之间的常数。将式 (13) 代入式 (9) 中, 得

$$\begin{aligned} \Delta q &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \left[(1-a)^2 + 1 + a^2 \right] (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{(1-a)^2 + 1 + a^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) \sqrt{(1-a)^2 + 1 + a^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2)^2 + (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)^2 + (\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3)^2} = \\ &= (\Delta q)_w \end{aligned} \quad (14)$$

因此, 当等应力 Lode 角加载时, 式 (9) 的表达可退化为式 (11)。同样的方法分析式 (10), 当应变全 Lode 角及应变增量 Lode 角相等且为一常量时, 即满足:

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{\Delta\varepsilon_2 - \Delta\varepsilon_3}{\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_3} = b \quad (15)$$

式 (15) 中 b 为某一介于 0、1 之间的常数。将式 (15) 代入式 (10), 同样可以得到等应变 Lode 角加载时, 式 (10) 可退化为式 (12)。

4 功的增量的 2 种表达

至此, 对 1 个土单元的应力与应变的描述至少有 2 种方式: 一是用三向主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 与三向主应变 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 来描述; 二是用应力 p 、 q 与应变 ε_v 、 ε_d 来描述。于是, 外力加载对土单元做功的增量 ΔW 就会有 2 种表达了。

受三向主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 , 并且当前各方向主应变分别为 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 的土单元, 在主应力增量 $(\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3)^T$ 作用下, 产生的主应变增量为 $(\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \Delta\varepsilon_3)^T$, 则根据功的定义, 在此过程中外力对土单元做功的增量 ΔW 为

$$\Delta W = \sigma_1 \Delta\varepsilon_1 + \sigma_2 \Delta\varepsilon_2 + \sigma_3 \Delta\varepsilon_3 \quad (16)$$

相仿, 当前应力状态为 p 、 q , 应变状态为 ε_v 、 ε_d 的土单元, 在应力增量 $(\Delta p, \Delta q)^T$ 作用下, 产生的应变增量为 $(\Delta\varepsilon_v, \Delta\varepsilon_d)^T$, 则此过程中, 外力对土单元做功的增量还可表示为

$$\Delta W' = p \Delta\varepsilon_v + q \Delta\varepsilon_d \quad (17)$$

式中 $\Delta\varepsilon_v$ 与 $\Delta\varepsilon_d$ 的表达参照式 (8)、(10), 对比式 (16)、(17) 可知: 在一般情况下 $\Delta W \neq \Delta W'$ 。

进一步分析表明, 式 (16) 与式 (17) 的表达也并非完全不等, 在某些特殊情况下二者相符一致。例如考虑等应力 Lode 角加载, 并假定应力全量 Lode 角与应变增量 Lode 角一致, 即

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3} = c \quad (18)$$

式中: c 为某一介于 0、1 之间的常量。如果从剪切加载开始计算应变, 则应变全量也满足式 (18) 所述应变增量的比例:

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = c \quad (19)$$

将式 (18)、(19) 代入式 (17) 中可得到

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \sigma_1 \Delta\varepsilon_1 + \sigma_3 \Delta\varepsilon_3 + c^2 \sigma_1 \Delta\varepsilon_1 + \\ &\quad c(1-c)(\sigma_1 \Delta\varepsilon_3 + \sigma_3 \Delta\varepsilon_1) + (1-c)^2 \sigma_3 \Delta\varepsilon_3 = \\ &\quad \sigma_1 \Delta\varepsilon_1 + \sigma_3 \Delta\varepsilon_3 + \\ &\quad [c\sigma_1 + (1-c)\sigma_3] \cdot [c\Delta\varepsilon_1 + (1-c)\Delta\varepsilon_3] = \\ &\quad \sigma_1 \Delta\varepsilon_1 + \sigma_2 \Delta\varepsilon_2 + \sigma_3 \Delta\varepsilon_3 = \Delta W \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) 表明, 当满足式 (18)、(19), 即等应力 Lode 角加载并且应变增量 Lode 角与应力全量 Lode 角相同的情况下, 2 种功的增量的表达式 (16) 与 (17) 一致。

5 岩土材料塑性功表达的近似性

岩土材料是典型的弹塑性材料, 并且相对于总应变而言, 弹性应变所占的份额较小。因此, 岩土本构模型主要讨论岩土材料受力与塑性变形的关系, 又称岩土塑性理论。这样, 塑性功 W^p 就成为岩土塑性理论中经常讨论的话题。与功的增量相同, 塑性功增量 ΔW^p 的表达也存在上一节所提到的问题。在常见的等应力 Lode 角加载过程中, 如果要满足如上一节所述的 2 种塑性功增量表述一致, 则参照式 (18), 前提条件相应的变为

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\Delta\varepsilon_2^p - \Delta\varepsilon_3^p}{\Delta\varepsilon_1^p - \Delta\varepsilon_3^p} = c \quad (21)$$

式中: $\Delta\varepsilon_1^p$ 、 $\Delta\varepsilon_2^p$ 与 $\Delta\varepsilon_3^p$ 分别为主塑性应变增量。

然而, Wood^[8]、Nakai^[9]、Anandarajah 等^[10]、郑颖人等^[11]、沈珠江^[12]、李广信^[13]等的试验结果均表明, 岩土类材料的塑性应变增量方向并不惟一的取决于应力全量, 而与应力增量方向也有关。

姚仰平等根据 Lade 等^[14]的试验结果, 分析总结认为, 可近似用式 (22) 来描述岩土材料的实际塑性应变流动方向^[15-18]。

$$\frac{\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_3}}{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_3}} = \frac{\Delta\varepsilon_2^p - \Delta\varepsilon_3^p}{\Delta\varepsilon_1^p - \Delta\varepsilon_3^p} \quad (22)$$

对比式 (21) 与式 (22) 可知: 一般情况下, 等应力 Lode 角加载过程中, 岩土材料塑性应变增量 Lode 角与应力全量 Lode 角相等的条件在实际中难以满足。因此, 在一般情况下, 对实际岩土材料进行等应力 Lode 角加载过程中, 按式 (17) 表述的塑性功增量 $\Delta W'^p$ 与按功的增量的定义式 (16) 表述的塑性功增量 ΔW^p 不符。故对一般加载情况而言, $\Delta W'^p$ 仅是 ΔW^p 的一种近似。

需强调, 对岩土力学中常用的常规三轴压缩应

力状态 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$) 或常规三轴拉伸应力状态 ($\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$) 而言, 式 (13)、(15)、(18)、(21) 与 (22) 均成立, 故在这两种常规应力状态下表达 $(\Delta q)_w$ 、 $(\Delta \varepsilon_d)_w$ 、 $\Delta W'$ 与 $\Delta W'^p$ 均为精确表达。

6 结 论

(1) 一般情况下, 直接用主应力增量 $\Delta \sigma_1$ 、 $\Delta \sigma_2$ 、 $\Delta \sigma_3$ 或主应变增量 $\Delta \varepsilon_1$ 、 $\Delta \varepsilon_2$ 、 $\Delta \varepsilon_3$ 表达的增量 $(\Delta q)_w$ 、 $(\Delta \varepsilon_d)_w$ 是不合理的; 用 p 、 q 、 $\Delta \varepsilon_v$ 、 $\Delta \varepsilon_d$ 表达的功的增量 $\Delta W'$ 与用 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 、 $\Delta \varepsilon_1$ 、 $\Delta \varepsilon_2$ 、 $\Delta \varepsilon_3$ 定义的功的增量 ΔW 不等。

(2) 在某些特殊情况下: 例如等应力 Lode 角加载时, 增量 $(\Delta q)_w$ 表达成立; 等应变 Lode 角加载时, 增量 $(\Delta \varepsilon_d)_w$ 表达成立; 应力 Lode 角与应变增量 Lode 角在加载中相等且为常量时, $\Delta W = \Delta W'$ 。

(3) 实际岩土材料在一般加载情况下, 应力全量 Lode 角与塑性应变增量 Lode 角不能保证时时相等。故即使等应力 Lode 角加载, 塑性功增量表达 $\Delta W'^p$ 也仅为其定义 ΔW^p 的近似。

参 考 文 献

- [1] 姚仰平, 侯伟. 土的基本力学特性及其弹塑性描述[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 2881—2902.
YAO Yang-ping, HOU Wei. Basic mechanical behavior of soils and their elastoplastic modeling[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(10): 2881—2902.
- [2] 王仁, 熊祝华, 黄文彬. 塑性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [3] 严宗达. 塑性力学[M]. 天津: 天津大学出版社, 1988.
- [4] 余同希. 塑性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989.
- [5] 夏志皋. 塑性力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1991.
- [6] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [7] 姚仰平, 祝恩阳. 比萨斜塔斜而不倒的数学奥秘[J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊 2): 36—41.
YAO Yang-ping, ZHU En-yang. Mathematical mystery for lean and stand of leaning tower of Pisa[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(Supp.2): 36—41.
- [8] WOOD D M. Soil behavior and critical state soil mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [9] NAKAI T. An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stress path dependency in the three-dimensional stresses[J]. **Soils and Foundations**, 1989, 29(1): 119—137.
- [10] ANANDARAJAH A, SOBHAN K, KUGANENTHIRA N. Incremental stress-strain behavior of granular soil[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1995, 121(1): 57—68.
- [11] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理: 广义塑性理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
- [12] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000.
- [13] 李广信. 土的清华弹塑性模型及其发展[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(1): 1—10.
LI Guang-xin. Characteristics and development of Tsinghua elasto-plastic model for soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2006, 28(1): 1—10.
- [14] LADE P V, KIM M K. Single hardening constitutive model for soil, rock and concrete[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1995, 32(14): 1963—1978.
- [15] YAO Y P, SUN D A. Application of Lade's criterion to Cam-clay model[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2000, 126(1): 112—119.
- [16] YAO Yang-ping, SUN De-an. Application of Lade's criterion to Cam-clay model[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2000, 126(1): 112—119.
- [17] YAO Yang-ping, SUN De-an. Application of Lade's criterion to Cam-clay model (Closure)[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2001, 127(6): 631—633.
- [18] 姚仰平, 孙凯, 路德春. 岩土材料塑性应变增量方向的确定[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 692—698.
YAO Yang-ping, SUN Kai, LU De-chun. Determination of the direction of plastic strain increment for geomaterials[J]. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 2007, 39(5): 692—698.